ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

2021-2022 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 211 ANALİZ III 1. VE 2. GRUP QUİZ SORULARI

1) $\int_0^{\pi} \frac{|\cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx$ has olmayan integralinin yakınsak veya ıraksak olup olmadığını inceleyiniz.

2) $\int_{-\infty}^{\infty} 2^{x-|x|} dx$ has olmayan integralinin Cauchy esas değerini bulunuz.

3) Aşağıdaki serilerin karakterini belirleyiniz.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5^{k+1}} + \frac{(2k)!}{3^k} \right)$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(3-(-1)^k\right)^k}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n+4}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10}{3^{1/n}+9}$

Not: Sınav **22.11.2021** Pazartesi günü **16:00-16:45** arasında gerçekleşecektir. Süre 45 dakikadır. Başarılar

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR, Prof. Dr. Cenap DUYAR

ANALİZ III 1. VE 2. GRUP 1. QUİZ ÇÖZÜMLERİ

1-) $f(x)=\dfrac{|\cos x|}{\sqrt{\sin x}}$ fonksiyonu $x=0$ noktasının sağında ve $x=\pi$ noktasının solunda sınırsız olduğundan

$$I=\int_0^{\pi}\frac{|\cos x|}{\sqrt{\sin x}}\,dx=\int_0^{\pi/2}\frac{|\cos x|}{\sqrt{\sin x}}\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{|\cos x|}{\sqrt{\sin x}}\,dx=I_1+I_2$$

$$I_1=\int_0^{\pi/2}\frac{|\cos x|}{\sqrt{\sin x}}\,dx=\lim_{\lambda\to0^+}\int_{\lambda}^{\pi/2}\frac{|\cos x|}{\sqrt{\sin x}}\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l}u=\sin x\\ du=\cos x\,dx\end{array}}$$

$$=\lim_{\lambda\to0^+}\int_{\sin\lambda}^{1}\frac{du}{\sqrt{u}}=\lim_{\lambda\to0^+}2\sqrt{u}\,\Big|_{\sin\lambda}^{1}$$

$$=\lim_{\lambda\to0^+}2-2\sqrt{\sin\lambda}=2$$

$$I_2=\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{|\cos x|}{\sqrt{\sin x}}\,dx=\lim_{\lambda\to0^+}\int_{\pi/2}^{\pi-\lambda}\frac{|\cos x|}{\sqrt{\sin x}}\,dx=\lim_{\lambda\to0^+}\int_{1}^{\sin(\pi-\lambda)}\frac{-du}{\sqrt{u}}$$

$$=-\lim_{\lambda\to0^+}2\sqrt{u}\,\Big|_{1}^{\sin(\pi-\lambda)}=-\lim_{\lambda\to0^+}2\sqrt{\sin(\pi-\lambda)}-2=2$$

$$I=I_1+I_2=2+2=4$$

2-) E.D. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}2^{x-|x|}\,dx=\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t}2^{x-|x|}\,dx$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\int_{-t}^{0}2^{x-(-x)}\,dx+\int_0^t 2^{x-x}\,dx\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\int_{-t}^{0}2^{2x}\,dx+\int_0^t 1\,dx\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{2^{2x}}{2\ln 2}\Big|_{-t}^{0}+x\Big|_0^t\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2\ln2}-\frac{2^{-2t}\to 0}{2\ln 2}+t$$

$$=\infty$$

3) • $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5^{k+1}}+\frac{(2k)!}{3^k}\right)$ serisi yakınsaktır, çünkü $\sum\frac{2}{5^{k+1}}=\frac{2}{5}\sum\frac{1}{5^k}=\frac{2}{5}\sum\left(\frac{1}{5}\right)^k$ seri bir geometrik seridir ve $q=1/5$, $|q|<1$ olduğundan yakınsaktır, yine $\sum\frac{(2k)!}{3^k}$ serisi için $a_k=\frac{(2k)!}{3^k}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2k+2)!/3^{k+1}}{(2k)!/3^k}=\frac{1}{3}(2k+1)(2k+2)$ ve

$\lambda=\lim_{k\to\infty}\frac{(2k+1)(2k+2)}{3}=\infty$ olduğundan, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!}{3^k}$ serisi ıraksaktır, verilen seri bir yakınsak bir ıraksak serinin toplamı olduğundan ıraksaktır.

• $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(3-(-1)^k)^k}$ serisi yak. mı?

$a_k=\frac{1}{(3-(-1)^k)^k}$ olsun, $a_k=\begin{cases}1/2^k, & k \text{ çiftse}\\ 1/4^k, & k \text{ tekse}\end{cases}$ olduğundan,

$\forall k\in\mathbb{N}$ için $a_k\leq 1/2^k$ ve $\sum 1/2^k$ geo. serisi yak. olduğundan

• $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{4^n+4}$ serisi yakınsaktır, çünkü her $n\in\mathbb{N}$ için $\frac{3^n}{4^n+4}<\frac{3^n}{4^n}=\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ve $\sum\left(\frac{3}{4}\right)^n$ geometrik serisi yakınsak olduğundan ($\left|\frac{3}{4}\right|<1$ olduğu için), karşılaştırma testine göre $\sum\frac{3^n}{4^n+4}$ serisi de yakınsaktır.

• $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{3^{1/n}+9}$ serisi ıraksaktır, çünkü $a_n=\frac{10}{3^{1/n}+7}$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty}\frac{10}{3^{1/n}+9}$

$=\frac{10}{3^{\lim_{n\to\infty}(1/n)}+9}=\frac{10}{3^0+9}=1\neq 0$ olduğundan verilen seri ıraksaktır.